2 Concepto Informal de Computabilidad

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Computabilidad CCOS 257

Contenido

1. Funciones calculables
2. Insolubilidad del problema de paro
3. Teorema de Kleene
4. Tesis de Church
5. Ejercicios

Funciones calculables I

- Aquí hay otro ejemplo de una función parcial calculable:

  $F(n) =$ el $p > n$ más pequeño tal que tanto p como $p + 2$ son primos

Funciones calculables I

- Aquí hay otro ejemplo de una función parcial calculable:

  $F(n) =$ el $p > n$ más pequeño tal que tanto p como $p + 2$ son primos

- Aquí se ha de entender que $F(n)$ está indefinido si no existe un número p como se describió; así F podría no ser total.

Funciones calculables I

- Aquí hay otro ejemplo de una función parcial calculable:

  $F(n) =$ el $p > n$ más pequeño tal que tanto p como $p + 2$ son primos

- Aquí se ha de entender que $F(n)$ está indefinido si no existe un número p como se describió; así F podría no ser total.
- Por ejemplo, $F(9) = 11$ ya que ambos 11 y 13 son primos.

Funciones calculables I

- Aquí hay otro ejemplo de una función parcial calculable:

  $F(n) =$ el $p > n$ más pequeño tal que tanto p como $p + 2$ son primos

- Aquí se ha de entender que $F(n)$ está indefinido si no existe un número p como se describió; así F podría no ser total.
- Por ejemplo, $F(9) = 11$ ya que ambos 11 y 13 son primos.
- No se sabe si F es total o no. La "conjetura de los primos gemelos", la que dice que existen infinitos pares de primos que difieren en 2, es equivalente a la afirmación de que F es total.

Funciones calculables I

- Aquí hay otro ejemplo de una función parcial calculable:

$$F(n) = \text{el } p > n \text{ más pequeño tal que tanto } p \text{ como } p+2 \text{ son primos}$$

- Aquí se ha de entender que $F(n)$ está indefinido si no existe un número p como se describió; así F podría no ser total.
- Por ejemplo, $F(9) = 11$ ya que ambos 11 y 13 son primos.
- No se sabe si F es total o no. La "conjetura de los primos gemelos", la que dice que existen infinitos pares de primos que difieren en 2, es equivalente a la afirmación de que F es total.
- La conjetura de los primos gemelos es aún un problema abierto.

- Aquí hay otro ejemplo de una función parcial calculable:

  $F(n) =$ el $p > n$ más pequeño tal que tanto p como $p + 2$ son primos

- Aquí se ha de entender que $F(n)$ está indefinido si no existe un número p como se describió; así F podría no ser total.
- Por ejemplo, $F(9) = 11$ ya que ambos 11 y 13 son primos.
- No se sabe si F es total o no. La "conjetura de los primos gemelos", la que dice que existen infinitos pares de primos que difieren en 2, es equivalente a la afirmación de que F es total.
- La conjetura de los primos gemelos es aún un problema abierto.
- Sin embargo, podemos estar seguros de que F es calculable efectivamente. Un procedimiento para calcular $F(n)$ es como sigue.

Funciones calculables II

- “Dado n, primero defina $p = n + 1$. Luego verifique si p y $p + 2$ son o no primos.

Funciones calculables II

- “Dado n, primero defina $p = n + 1$. Luego verifique si p y $p + 2$ son o no primos.
- Si lo son, entonces pare y dé la salida p. Si no, incremente p y continue.”

Funciones calculables II

- "Dado n, primero defina $p = n + 1$. Luego verifique si p y $p + 2$ son o no primos.
- Si lo son, entonces pare y dé la salida p. Si no, incremente p y continue."
- ¿Qué si n es enorme, digamos, $n = 10^{10^{10}}$?

Funciones calculables II

- "Dado n, primero defina $p = n + 1$. Luego verifique si p y $p + 2$ son o no primos.
- Si lo son, entonces pare y dé la salida p. Si no, incremente p y continue."
- ¿Qué si n es enorme, digamos, $n = 10^{10^{10}}$?
- Por un lado si existe un par de primos más grande, entonces este procedimiento encontrará al primero y para con la salida correcta.

Funciones calculables II

- "Dado n, primero defina $p = n + 1$. Luego verifique si p y $p + 2$ son o no primos.
- Si lo son, entonces pare y dé la salida p. Si no, incremente p y continue."
- ¿Qué si n es enorme, digamos, $n = 10^{10^{10}}$?
- Por un lado si existe un par de primos más grande, entonces este procedimiento encontrará al primero y para con la salida correcta.
- Por otro lado, si no hay un par de primos más grande, entonces el procedimiento nunca para, así nunca da una respuesta.

Funciones calculables II

- "Dado n, primero defina $p = n + 1$. Luego verifique si p y $p + 2$ son o no primos.
- Si lo son, entonces pare y dé la salida p. Si no, incremente p y continue."
- ¿Qué si n es enorme, digamos, $n = 10^{10^{10}}$?
- Por un lado si existe un par de primos más grande, entonces este procedimiento encontrará al primero y para con la salida correcta.
- Por otro lado, si no hay un par de primos más grande, entonces el procedimiento nunca para, así nunca da una respuesta.
- Lo que es correcto; ya que $F(n)$ está indefinida, el procedimiento no debe darnos alguna respuesta.

Funciones calculables III

- Ahora suponga que modificamos el ejemplo. Considere la función total:

$$G(n) = \begin{cases} F(n) & \text{si } F(n)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Funciones calculables III

- Ahora suponga que modificamos el ejemplo. Considere la función total:

$$G(n) = \begin{cases} F(n) & \text{si } F(n)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Aquí "$F(n)\downarrow$" significa que $F(n)$ está definida, así que n pertenece al dominio de F.

Funciones calculables III

- Ahora suponga que modificamos el ejemplo. Considere la función total:

$$G(n) = \begin{cases} F(n) & \text{si } F(n)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Aquí "$F(n)\downarrow$" significa que $F(n)$ está definida, así que n pertenece al dominio de F.
- Entonces la función G *también* es calculable efectivamente. Esto es, *existe* un programa que calcula G correctamente.

Funciones calculables III

- Ahora suponga que modificamos el ejemplo. Considere la función total:
$$G(n) = \begin{cases} F(n) & \text{si } F(n)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
- Aquí "$F(n)\downarrow$" significa que $F(n)$ está definida, así que n pertenece al dominio de F.
- Entonces la función G *también* es calculable efectivamente. Esto es, *existe* un programa que calcula G correctamente.
- La conjetura de los primos gemelos es verdadera o falsa: O hay infinitos pares de primos, o hay un par más grande. (En este punto, la lógica clásica entra una vez más).

Funciones calculables III

- Ahora suponga que modificamos el ejemplo. Considere la función total:

$$G(n) = \begin{cases} F(n) & \text{si } F(n)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Aquí "$F(n)\downarrow$" significa que $F(n)$ está definida, así que n pertenece al dominio de F.
- Entonces la función G *también* es calculable efectivamente. Esto es, *existe* un programa que calcula G correctamente.
- La conjetura de los primos gemelos es verdadera o falsa: O hay infinitos pares de primos, o hay un par más grande. (En este punto, la lógica clásica entra una vez más).
- En el primer caso, $F = G$ y el procedimiento efectivo para F también calcula G. En el segundo caso, G es eventualmente la función constante 0.

Funciones calculables III

- Ahora suponga que modificamos el ejemplo. Considere la función total:

$$G(n) = \begin{cases} F(n) & \text{si } F(n)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Aquí "$F(n)\downarrow$" significa que $F(n)$ está definida, así que n pertenece al dominio de F.
- Entonces la función G *también* es calculable efectivamente. Esto es, *existe* un programa que calcula G correctamente.
- La conjetura de los primos gemelos es verdadera o falsa: O hay infinitos pares de primos, o hay un par más grande. (En este punto, la lógica clásica entra una vez más).
- En el primer caso, $F = G$ y el procedimiento efectivo para F también calcula G. En el segundo caso, G es eventualmente la función constante 0.
- Y cualquier función eventualmente constante es calculable (el procedimiento puede utilizar una tabla para la parte finita de la función antes de que se estabilice).

Funciones calculables IV

- Así en cualquier caso, *existe* un procedimiento efectivo para G. Eso no es lo mismo que conocer el procedimiento.

Funciones calculables IV

- Así en cualquier caso, *existe* un procedimiento efectivo para G. Eso no es lo mismo que conocer el procedimiento.
- Este ejemplo indica una vez más la diferencia entre conocer que un cierto procedimiento efectivo existe y tener el procedimiento efectivo en nuestras manos (o tener razones convincentes para saber que el procedimiento en nuestras manos funcionará).

Funciones calculables IV

- Así en cualquier caso, *existe* un procedimiento efectivo para G. Eso no es lo mismo que conocer el procedimiento.
- Este ejemplo indica una vez más la diferencia entre conocer que un cierto procedimiento efectivo existe y tener el procedimiento efectivo en nuestras manos (o tener razones convincentes para saber que el procedimiento en nuestras manos funcionará).
- Un programa de una persona es otro dato de esa persona. Éste es el principio detrás de los sistemas operativos (y detrás de la idea de un programa de computadora almacenado).

Funciones calculables IV

- Así en cualquier caso, *existe* un procedimiento efectivo para G. Eso no es lo mismo que conocer el procedimiento.
- Este ejemplo indica una vez más la diferencia entre conocer que un cierto procedimiento efectivo existe y tener el procedimiento efectivo en nuestras manos (o tener razones convincentes para saber que el procedimiento en nuestras manos funcionará).
- Un programa de una persona es otro dato de esa persona. Éste es el principio detrás de los sistemas operativos (y detrás de la idea de un programa de computadora almacenado).
- El programa favorito de uno es, para el sistema operativo, otra pieza de dato para ser recibida como entrada y procesarla.

Funciones calculables IV

- Así en cualquier caso, *existe* un procedimiento efectivo para G. Eso no es lo mismo que conocer el procedimiento.
- Este ejemplo indica una vez más la diferencia entre conocer que un cierto procedimiento efectivo existe y tener el procedimiento efectivo en nuestras manos (o tener razones convincentes para saber que el procedimiento en nuestras manos funcionará).
- Un programa de una persona es otro dato de esa persona. Éste es el principio detrás de los sistemas operativos (y detrás de la idea de un programa de computadora almacenado).
- El programa favorito de uno es, para el sistema operativo, otra pieza de dato para ser recibida como entrada y procesarla.
- El sistema operativo está calculando los valores de una función "universal" de aridad-2. (Históricamente, ¡el flujo de ideas fue exactamente en la dirección opuesta! La siguiente digresión expande este punto).

Digresión:

- El concepto de programa de computadora de propósito general almacenado es ahora muy común, pero el concepto se desarrolló lentamente sobre un periodo de tiempo.

Digresión:

- El concepto de programa de computadora de propósito general almacenado es ahora muy común, pero el concepto se desarrolló lentamente sobre un periodo de tiempo.
- ¡La máquina ENIAC, la computadora más importante en los 1940s, era programada moviendo interruptores e insertando cables en tableros con contactos! Esto está muy lejos de tratar un programa como dato.

Digresión:

- El concepto de programa de computadora de propósito general almacenado es ahora muy común, pero el concepto se desarrolló lentamente sobre un periodo de tiempo.
- ¡La máquina ENIAC, la computadora más importante en los 1940s, era programada moviendo interruptores e insertando cables en tableros con contactos! Esto está muy lejos de tratar un programa como dato.
- Fue von Neumann quien, en un reporte técnico de 1945, estableció las ideas cruciales para un programa de computadora de propósito general almacenado, esto es, para una computadora universal.

Digresión:

- El concepto de programa de computadora de propósito general almacenado es ahora muy común, pero el concepto se desarrolló lentamente sobre un periodo de tiempo.
- ¡La máquina ENIAC, la computadora más importante en los 1940s, era programada moviendo interruptores e insertando cables en tableros con contactos! Esto está muy lejos de tratar un programa como dato.
- Fue von Neumann quien, en un reporte técnico de 1945, estableció las ideas cruciales para un programa de computadora de propósito general almacenado, esto es, para una computadora universal.
- El artículo de Turing de 1936 sobre lo que ahora es llamado máquinas de Turing ha demostrado la existencia de una "máquina universal de Turing" para calcular la función Φ descrita posteriormente.

Digresión:

- El concepto de programa de computadora de propósito general almacenado es ahora muy común, pero el concepto se desarrolló lentamente sobre un periodo de tiempo.
- ¡La máquina ENIAC, la computadora más importante en los 1940s, era programada moviendo interruptores e insertando cables en tableros con contactos! Esto está muy lejos de tratar un programa como dato.
- Fue von Neumann quien, en un reporte técnico de 1945, estableció las ideas cruciales para un programa de computadora de propósito general almacenado, esto es, para una computadora universal.
- El artículo de Turing de 1936 sobre lo que ahora es llamado máquinas de Turing ha demostrado la existencia de una "máquina universal de Turing" para calcular la función Φ descrita posteriormente.
- Cuando Turing fue a Princeton en 1936-37, von Neumann estubo ahí y debió de estar consciente de su trabajo.

Digresión:

- El concepto de programa de computadora de propósito general almacenado es ahora muy común, pero el concepto se desarrolló lentamente sobre un periodo de tiempo.
- ¡La máquina ENIAC, la computadora más importante en los 1940s, era programada moviendo interruptores e insertando cables en tableros con contactos! Esto está muy lejos de tratar un programa como dato.
- Fue von Neumann quien, en un reporte técnico de 1945, estableció las ideas cruciales para un programa de computadora de propósito general almacenado, esto es, para una computadora universal.
- El artículo de Turing de 1936 sobre lo que ahora es llamado máquinas de Turing ha demostrado la existencia de una "máquina universal de Turing" para calcular la función Φ descrita posteriormente.
- Cuando Turing fue a Princeton en 1936-37, von Neumann estubo ahí y debió de estar consciente de su trabajo.
- Aparentemente, el pensamiento de von Neumann en 1945 fue influenciado por el trabajo de Turing de casi una década antes.

Funciones calculables V

- Suponga que adoptamos un método fijo para codificar cualquier conjunto de instrucciones mediante un solo número natural.

Funciones calculables V

- Suponga que adoptamos un método fijo para codificar cualquier conjunto de instrucciones mediante un solo número natural.
- Primero, convertimos las instrucciones a una cadena de 0's y 1's -uno siempre hace esto con programas de computadora- y luego consideramos a la cadena como el nombre de un número natural en notación base-2.

Funciones calculables V

- Suponga que adoptamos un método fijo para codificar cualquier conjunto de instrucciones mediante un solo número natural.
- Primero, convertimos las instrucciones a una cadena de 0's y 1's -uno siempre hace esto con programas de computadora- y luego consideramos a la cadena como el nombre de un número natural en notación base-2.
- Entonces la "función universal"

$$\Phi(w, x) = \begin{array}{l} \text{el resultado de aplicar las instrucciones} \\ \text{codificadas mediante } w \text{ a la entrada } x \end{array}$$

es una función parcial calculable efectivamente (donde se entiende que $\Phi(w, x)$ está indefinida si al aplicar las instrucciones codificadas mediante w a la entrada x no para y no regresa una salida).

Funciones calculables VI

- Aquí están las instrucciones para Φ: "Dados w y x, decodifica w para ver que hay que hacer con x y luego lo hace".

Funciones calculables VI

- Aquí están las instrucciones para Φ: "Dados w y x, decodifica w para ver que hay que hacer con x y luego lo hace".
- Por supuesto, la función Φ no es total.

Funciones calculables VI

- Aquí están las instrucciones para Φ: "Dados w y x, decodifica w para ver que hay que hacer con x y luego lo hace".
- Por supuesto, la función Φ no es total.
- Por una cosa, cuando tratamos de decodificar w, podriamos encontrar un completo sin sentido, así que la instrucción "luego lo hace" nos lleva a ningún lado.

Funciones calculables VI

- Aquí están las instrucciones para Φ: "Dados w y x, decodifica w para ver que hay que hacer con x y luego lo hace".
- Por supuesto, la función Φ no es total.
- Por una cosa, cuando tratamos de decodificar w, podriamos encontrar un completo sin sentido, así que la instrucción "luego lo hace" nos lleva a ningún lado.
- Y aún si al decodificar w obtenemos instrucciones explícitas y comprensibles, el aplicar esas instrucciones a un x en particular podría nunca producir una salida.

Funciones calculables VI

- Aquí están las instrucciones para Φ: "Dados w y x, decodifica w para ver que hay que hacer con x y luego lo hace".
- Por supuesto, la función Φ no es total.
- Por una cosa, cuando tratamos de decodificar w, podriamos encontrar un completo sin sentido, así que la instrucción "luego lo hace" nos lleva a ningún lado.
- Y aún si al decodificar w obtenemos instrucciones explícitas y comprensibles, el aplicar esas instrucciones a un x en particular podría nunca producir una salida.
- Este razonamiento será repetido en el Capítulo 3, cuando tengamos material más concreto con el que tratar.

- Aquí están las instrucciones para Φ: "Dados w y x, decodifica w para ver que hay que hacer con x y luego lo hace".
- Por supuesto, la función Φ no es total.
- Por una cosa, cuando tratamos de decodificar w, podriamos encontrar un completo sin sentido, así que la instrucción "luego lo hace" nos lleva a ningún lado.
- Y aún si al decodificar w obtenemos instrucciones explícitas y comprensibles, el aplicar esas instrucciones a un x en particular podría nunca producir una salida.
- Este razonamiento será repetido en el Capítulo 3, cuando tengamos material más concreto con el que tratar.
- Pero las ideas rectoras serán las mismas.

Función universal I

- La función parcial de aridad-dos Φ es "universal" en el sentido de que *cualquier* función parcial f efectivamente calculable está dada por la ecuación

$$f(x) = \Phi(e, x) \text{ para todo } x$$

donde e codifica las instrucciones de f.

Función universal I

- La función parcial de aridad-dos Φ es "universal" en el sentido de que *cualquier* función parcial f efectivamente calculable está dada por la ecuación

  $$f(x) = \Phi(e, x) \text{ para todo } x$$

  donde e codifica las instrucciones de f.
- Será útil introducir aquí una notación especial: Sea $[\![e]\!]$ la función parcial de aridad-uno definida por la ecuación

  $$[\![e]\!](x) = \Phi(e, x)$$

Función universal I

- La función parcial de aridad-dos Φ es "universal" en el sentido de que *cualquier* función parcial f efectivamente calculable está dada por la ecuación

$$f(x) = \Phi(e, x) \text{ para todo } x$$

  donde e codifica las instrucciones de f.
- Será útil introducir aquí una notación especial: Sea $[\![e]\!]$ la función parcial de aridad-uno definida por la ecuación

$$[\![e]\!](x) = \Phi(e, x)$$

- Esto es, $[\![e]\!]$ es la función parcial cuyas instrucciones están codificadas por e, en el entendido de que algunos valores de e podrían codificar algo no sensato, la función $[\![e]\!]$ podría ser la función vacía.

Función universal I

- La función parcial de aridad-dos Φ es "universal" en el sentido de que *cualquier* función parcial f efectivamente calculable está dada por la ecuación

$$f(x) = \Phi(e, x) \text{ para todo } x$$

  donde e codifica las instrucciones de f.
- Será útil introducir aquí una notación especial: Sea $[\![e]\!]$ la función parcial de aridad-uno definida por la ecuación

$$[\![e]\!](x) = \Phi(e, x)$$

- Esto es, $[\![e]\!]$ es la función parcial cuyas instrucciones están codificadas por e, en el entendido de que algunos valores de e podrían codificar algo no sensato, la función $[\![e]\!]$ podría ser la función vacía.
- En cualquier caso, $[\![e]\!]$ es la función parcial que obtenemos de Φ, cuando fijamos su primer variable en e.

- Así,

$$[\![0]\!], [\![1]\!], [\![2]\!], \ldots$$

es una lista completa (con repeticiones) de todas las funciones parciales calculables efectivamente. Los valores de $[\![e]\!]$ están dados por el $(e+1)-$ésimo renglón en la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|ccccc}
[\![0]\!] & \Phi(0,0) & \Phi(0,1) & \Phi(0,2) & \Phi(0,3) & \cdots \\
[\![1]\!] & \Phi(1,0) & \Phi(1,1) & \Phi(1,2) & \Phi(1,3) & \cdots \\
[\![2]\!] & \Phi(2,0) & \Phi(2,1) & \Phi(2,2) & \Phi(2,3) & \cdots \\
[\![3]\!] & \Phi(3,0) & \Phi(3,1) & \Phi(3,2) & \Phi(3,3) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Función universal III

- Usando la función parcial universal Φ, podemos construir una relación binaria *indecidible*, la relación *de paro* H:

$$\begin{aligned}\langle w, x\rangle \in H &\Leftrightarrow \Phi(w,x)\downarrow \\ &\Leftrightarrow \text{al aplicar las instrucciones codificadas por } w \\ &\quad\ \text{a la entrada } x \text{ para}\end{aligned}$$

Función universal III

- Usando la función parcial universal Φ, podemos construir una relación binaria *indecidible*, la relación *de paro* H:

$$\begin{aligned} \langle w, x\rangle \in H &\Leftrightarrow \Phi(w,x)\downarrow \\ &\Leftrightarrow \text{al aplicar las instrucciones codificadas por } w \\ &\quad\ \text{a la entrada } x \text{ para} \end{aligned}$$

- Desde el lado positivo, H es semidecible.

Función universal III

- Usando la función parcial universal Φ, podemos construir una relación binaria *indecidible*, la relación *de paro* H:

$$\begin{aligned}\langle w, x\rangle \in H &\Leftrightarrow \Phi(w, x)\downarrow \\ &\Leftrightarrow \text{al aplicar las instrucciones codificadas por } w \\ &\ \text{a la entrada } x \text{ para}\end{aligned}$$

- Desde el lado positivo, H es semidecible.
- Para calcular la función semicaracterística $c_H(w, x)$, dados w y x, primero calculamos $\Phi(w, x)$.

- Usando la función parcial universal Φ, podemos construir una relación binaria *indecidible*, la relación *de paro* H:

$$\begin{aligned}\langle w, x\rangle \in H \quad &\Leftrightarrow \quad \Phi(w,x)\downarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \text{al aplicar las instrucciones codificadas por } w \\ & \quad \text{a la entrada } x \text{ para}\end{aligned}$$

- Desde el lado positivo, H es semidecible.
- Para calcular la función semicaracterística $c_H(w,x)$, dados w y x, primero calculamos $\Phi(w,x)$.
- Si cuando ésta regrese un valor y pare, damos la salida "Sí" y paramos.

Función universal IV

- Desde el lado negativo, H no es decidible.

Función universal IV

- Desde el lado negativo, H no es decidible.
- Para ver esto, primero considere la siguiente función parcial:

$$f(x) = \begin{cases} \text{Sí} & \text{si } \Phi(x,x)\uparrow \\ \uparrow & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \end{cases}$$

Función universal IV

- Desde el lado negativo, H no es decidible.
- Para ver esto, primero considere la siguiente función parcial:

$$f(x) = \begin{cases} \text{Sí} & \text{si } \Phi(x,x)\uparrow \\ \uparrow & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \end{cases}$$

- Note que estamos usando la construcción diagonal clásica.

Función universal IV

- Desde el lado negativo, H no es decidible.
- Para ver esto, primero considere la siguiente función parcial:

$$f(x) = \begin{cases} \text{Sí} & \text{si } \Phi(x,x)\uparrow \\ \uparrow & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \end{cases}$$

- Note que estamos usando la construcción diagonal clásica.
- Mirando la anterior tabla de los valores de Φ ordenados en un arreglo bi-dimensional, uno ve que f ha sido construida yendo a lo largo de la diagonal de la tabla, tomando la entrada $\Phi(x,x)$ encontrada allí, y asegurando que $f(x)$ difiera de ella.

Función universal V

- Hay dos cosas que decir sobre f.

Función universal V

- Hay dos cosas que decir sobre f.
- Primero, f no puede ser calculable efectivamente.

Función universal V

- Hay dos cosas que decir sobre f.
- Primero, f no puede ser calculable efectivamente.
- Considere cualquier conjunto de instrucciones que pudiera calcular f.

Función universal V

- Hay dos cosas que decir sobre f.
- Primero, f no puede ser calculable efectivamente.
- Considere cualquier conjunto de instrucciones que pudiera calcular f.
- Dichas instrucciones tienen algún número de código k y así calcula la función $[\![k]\!]$.

Función universal V

- Hay dos cosas que decir sobre f.
- Primero, f no puede ser calculable efectivamente.
- Considere cualquier conjunto de instrucciones que pudiera calcular f.
- Dichas instrucciones tienen algún número de código k y así calcula la función $[\![k]\!]$.
- ¿Pudiera ser la misma que f? No, f y $[\![k]\!]$ difieren en la entrada k.

Función universal V

- Hay dos cosas que decir sobre f.
- Primero, f no puede ser calculable efectivamente.
- Considere cualquier conjunto de instrucciones que pudiera calcular f.
- Dichas instrucciones tienen algún número de código k y así calcula la función $[\![k]\!]$.
- ¿Pudiera ser la misma que f? No, f y $[\![k]\!]$ difieren en la entrada k.
- Esto es, f ha sido construida de tal manera que $f(k)$ difiere de $[\![k]\!](k)$, ellas difieren ya que una está definida y la otra no.

Función universal V

- Hay dos cosas que decir sobre f.
- Primero, f no puede ser calculable efectivamente.
- Considere cualquier conjunto de instrucciones que pudiera calcular f.
- Dichas instrucciones tienen algún número de código k y así calcula la función $[\![k]\!]$.
- ¿Pudiera ser la misma que f? No, f y $[\![k]\!]$ difieren en la entrada k.
- Esto es, f ha sido construida de tal manera que $f(k)$ difiere de $[\![k]\!](k)$, ellas difieren ya que una está definida y la otra no.
- Así estas instrucciones no pueden calcular correctamente a f; ellas producen el resultado equivocado en la entrada k.

Función universal V

- Hay dos cosas que decir sobre f.
- Primero, f no puede ser calculable efectivamente.
- Considere cualquier conjunto de instrucciones que pudiera calcular f.
- Dichas instrucciones tienen algún número de código k y así calcula la función $[\![k]\!]$.
- ¿Pudiera ser la misma que f? No, f y $[\![k]\!]$ difieren en la entrada k.
- Esto es, f ha sido construida de tal manera que $f(k)$ difiere de $[\![k]\!](k)$, ellas difieren ya que una está definida y la otra no.
- Así estas instrucciones no pueden calcular correctamente a f; ellas producen el resultado equivocado en la entrada k.
- Y como k fue arbitrario, estamos forzados a concluir que *ningún* conjunto de instrucciones puede calcular correctamente a f.

Función universal V

- Hay dos cosas que decir sobre f.
- Primero, f no puede ser calculable efectivamente.
- Considere cualquier conjunto de instrucciones que pudiera calcular f.
- Dichas instrucciones tienen algún número de código k y así calcula la función $[\![k]\!]$.
- ¿Pudiera ser la misma que f? No, f y $[\![k]\!]$ difieren en la entrada k.
- Esto es, f ha sido construida de tal manera que $f(k)$ difiere de $[\![k]\!](k)$, ellas difieren ya que una está definida y la otra no.
- Así estas instrucciones no pueden calcular correctamente a f; ellas producen el resultado equivocado en la entrada k.
- Y como k fue arbitrario, estamos forzados a concluir que *ningún* conjunto de instrucciones puede calcular correctamente a f.
- Este es nuestro primer ejemplo de una función parcial que no es calculable efectivamente.

Función universal V

- Hay dos cosas que decir sobre f.
- Primero, f no puede ser calculable efectivamente.
- Considere cualquier conjunto de instrucciones que pudiera calcular f.
- Dichas instrucciones tienen algún número de código k y así calcula la función $[\![k]\!]$.
- ¿Pudiera ser la misma que f? No, f y $[\![k]\!]$ difieren en la entrada k.
- Esto es, f ha sido construida de tal manera que $f(k)$ difiere de $[\![k]\!](k)$, ellas difieren ya que una está definida y la otra no.
- Así estas instrucciones no pueden calcular correctamente a f; ellas producen el resultado equivocado en la entrada k.
- Y como k fue arbitrario, estamos forzados a concluir que *ningún* conjunto de instrucciones puede calcular correctamente a f.
- Este es nuestro primer ejemplo de una función parcial que no es calculable efectivamente.
- Existen muchísimas más, como veremos.

Función universal VI

- En segundo lugar, podemos argumentar que *si* tuvieramos un procedimiento de decisión para H, entonces podriamos calcular f.

Función universal VI

- En segundo lugar, podemos argumentar que *si* tuvieramos un procedimiento de decisión para H, entonces podriamos calcular f.
- Para calcular $f(x)$, usamos primero el procedimiento de decisión H para decidir si $\langle x, x\rangle \in H$ o no.

Función universal VI

- En segundo lugar, podemos argumentar que *si* tuvieramos un procedimiento de decisión para H, entonces podriamos calcular f.
- Para calcular $f(x)$, usamos primero el procedimiento de decisión H para decidir si $\langle x, x\rangle \in H$ o no.
- Si no, entonces $f(x) =$ Sí. Pero si $\langle x, x\rangle \in H$, entonces el procedimiento para encontrar $f(x)$ caería en un ciclo infinito ya que $f(x)$ está indefinida.

Función universal VI

- En segundo lugar, podemos argumentar que *si* tuvieramos un procedimiento de decisión para H, entonces podriamos calcular f.
- Para calcular $f(x)$, usamos primero el procedimiento de decisión H para decidir si $\langle x, x\rangle \in H$ o no.
- Si no, entonces $f(x) =$ Sí. Pero si $\langle x, x\rangle \in H$, entonces el procedimiento para encontrar $f(x)$ caería en un ciclo infinito ya que $f(x)$ está indefinida.
- Juntando estas dos observaciones sobre f, concluimos que no puede existir un procedimiento de decisión para H.

Función universal VI

- En segundo lugar, podemos argumentar que *si* tuvieramos un procedimiento de decisión para H, entonces podriamos calcular f.
- Para calcular $f(x)$, usamos primero el procedimiento de decisión H para decidir si $\langle x, x\rangle \in H$ o no.
- Si no, entonces $f(x) =$ Sí. Pero si $\langle x, x\rangle \in H$, entonces el procedimiento para encontrar $f(x)$ caería en un ciclo infinito ya que $f(x)$ está indefinida.
- Juntando estas dos observaciones sobre f, concluimos que no puede existir un procedimiento de decisión para H.
- El hecho de que H es indecidible se expresa usualmente diciendo que "el problema de paro es irresoluble o también que es insoluble"; es decir, no podemos en general determinar efectivamente, dados w y x, si al aplicar las instrucciones codificadas por w a la entrada x eventualmente terminará o seguirá por siempre:

Insolubilidad del problema de paro I

- La relación

  $\{\langle w, x\rangle|$ al aplicar las instrucciones codificadas por w a la entrada x para

  es semidecidible pero no decidible.

Insolubilidad del problema de paro I

- La relación

  $\{\langle w, x\rangle |$ al aplicar las instrucciones codificadas por w a la entrada x para

  es semidecidible pero no decidible.

- La función f del argumento anterior

$$f(x) = \begin{cases} \text{Sí} & \text{si } \Phi(x,x)\uparrow \\ \uparrow & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \end{cases}$$

  es la función semicaracterística del conjunto $\{x|\Phi(x,x)\uparrow\}$.

Insolubilidad del problema de paro I

- La relación

  $\{\langle w, x\rangle|$ al aplicar las instrucciones codificadas por w a la entrada x para

  es semidecidible pero no decidible.
- La función f del argumento anterior

$$f(x) = \begin{cases} \text{Sí} & \text{si } \Phi(x,x)\uparrow \\ \uparrow & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \end{cases}$$

  es la función semicaracterística del conjunto $\{x|\Phi(x,x)\uparrow\}$.
- Ya que su función semicaraterística no es calculable efectivamente, podemos concluir que este conjunto *no* es semidecidible.

Insolubilidad del problema de paro II

- Sea K el complemento de este conjunto:

$$K = \{x|\Phi(x,x)\downarrow\} = \{x|[\![x]\!](x)\downarrow\}$$

Insolubilidad del problema de paro II

- Sea K el complemento de este conjunto:

$$K = \{x|\Phi(x,x)\downarrow\} = \{x|[\![x]\!](x)\downarrow\}$$

- Este conjunto es semidecidible.

Insolubilidad del problema de paro II

- Sea K el complemento de este conjunto:

$$K = \{x|\Phi(x,x)\downarrow\} = \{x|[\![x]\!](x)\downarrow\}$$

- Este conjunto es semidecidible.
- ¿Cómo podriamos calcular $c_K(x)$, dado x?

Insolubilidad del problema de paro II

- Sea K el complemento de este conjunto:

$$K = \{x | \Phi(x, x) \downarrow\} = \{x | [\![x]\!](x) \downarrow\}$$

- Este conjunto es semidecidible.
- ¿Cómo podriamos calcular $c_K(x)$, dado x?
- Tratamos de calcular $\Phi(x, x)$ (lo cual es posible ya que Φ es una función parcial calculable efectivamente).

Insolubilidad del problema de paro II

- Sea K el complemento de este conjunto:

$$K = \{x|\Phi(x,x)\downarrow\} = \{x|[\![x]\!](x)\downarrow\}$$

- Este conjunto es semidecidible.
- ¿Cómo podriamos calcular $c_K(x)$, dado x?
- Tratamos de calcular $\Phi(x,x)$ (lo cual es posible ya que Φ es una función parcial calculable efectivamente).
- Si y cuando el cálculo regrese una salida y pare, damos la salida "Sí" y paramos.

Insolubilidad del problema de paro II

- Sea K el complemento de este conjunto:

$$K = \{x | \Phi(x, x) \downarrow\} = \{x | [\![x]\!](x) \downarrow\}$$

- Este conjunto es semidecidible.
- ¿Cómo podriamos calcular $c_K(x)$, dado x?
- Tratamos de calcular $\Phi(x, x)$ (lo cual es posible ya que Φ es una función parcial calculable efectivamente).
- Si y cuando el cálculo regrese una salida y pare, damos la salida "Sí" y paramos.
- Hasta ese momento seguimos intentando.

Insolubilidad del problema de paro II

- Sea K el complemento de este conjunto:

$$K = \{x | \Phi(x, x) \downarrow\} = \{x | [\![x]\!](x) \downarrow\}$$

- Este conjunto es semidecidible.
- ¿Cómo podriamos calcular $c_K(x)$, dado x?
- Tratamos de calcular $\Phi(x, x)$ (lo cual es posible ya que Φ es una función parcial calculable efectivamente).
- Si y cuando el cálculo regrese una salida y pare, damos la salida "Sí" y paramos.
- Hasta ese momento seguimos intentando.
- Este argumento es el mismo que vimos para la semidecidibilidad de H.

Insolubilidad del problema de paro II

- Sea K el complemento de este conjunto:

$$K = \{x | \Phi(x, x) \downarrow\} = \{x | [\![x]\!](x) \downarrow\}$$

- Este conjunto es semidecidible.
- ¿Cómo podriamos calcular $c_K(x)$, dado x?
- Tratamos de calcular $\Phi(x, x)$ (lo cual es posible ya que Φ es una función parcial calculable efectivamente).
- Si y cuando el cálculo regrese una salida y pare, damos la salida "Sí" y paramos.
- Hasta ese momento seguimos intentando.
- Este argumento es el mismo que vimos para la semidecidibilidad de H.
- Y $x \in K \Leftrightarrow \langle x, x \rangle \in H$.

Teorema de Kleene I

- *Un conjunto (o una relación) es decidible si y sólo si él y su complemento son semidecidibles.*

Teorema de Kleene I

- *Un conjunto (o una relación) es decidible si y sólo si él y su complemento son semidecidibles.*
- Si estamos trabajando con conjuntos de números, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}$; si estamos trabajando con una relación de aridad-k, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}^k$.

Teorema de Kleene I

- *Un conjunto (o una relación) es decidible si y sólo si él y su complemento son semidecidibles.*
- Si estamos trabajando con conjuntos de números, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}$; si estamos trabajando con una relación de aridad-k, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}^k$.
- *Prueba:* Por un lado, si un conjunto S es decidible, entonces su complemento $\overline{S}$ también es decidible, simplemente intercambiamos el "Sí" y el "No".

Teorema de Kleene I

- *Un conjunto (o una relación) es decidible si y sólo si él y su complemento son semidecidibles.*
- Si estamos trabajando con conjuntos de números, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}$; si estamos trabajando con una relación de aridad-k, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}^k$.
- *Prueba:* Por un lado, si un conjunto S es decidible, entonces su complemento $\overline{S}$ también es decidible, simplemente intercambiamos el "Sí" y el "No".
- Así tanto S como su complemento $\overline{S}$ son semidecidibles ya que los conjuntos decidibles son también semidecidibles.

Teorema de Kleene I

- *Un conjunto (o una relación) es decidible si y sólo si él y su complemento son semidecidibles.*
- Si estamos trabajando con conjuntos de números, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}$; si estamos trabajando con una relación de aridad-k, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}^k$.
- *Prueba:* Por un lado, si un conjunto S es decidible, entonces su complemento $\overline{S}$ también es decidible, simplemente intercambiamos el "Sí" y el "No".
- Así tanto S como su complemento $\overline{S}$ son semidecidibles ya que los conjuntos decidibles son también semidecidibles.
- Por otro lado, suponga que S es un conjunto para el que tanto c_S como $c_{\overline{S}}$ son calculables efectivamente.

Teorema de Kleene I

- *Un conjunto (o una relación) es decidible si y sólo si él y su complemento son semidecidibles.*
- Si estamos trabajando con conjuntos de números, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}$; si estamos trabajando con una relación de aridad-k, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}^k$.
- *Prueba:* Por un lado, si un conjunto S es decidible, entonces su complemento $\overline{S}$ también es decidible, simplemente intercambiamos el "Sí" y el "No".
- Así tanto S como su complemento $\overline{S}$ son semidecidibles ya que los conjuntos decidibles son también semidecidibles.
- Por otro lado, suponga que S es un conjunto para el que tanto c_S como $c_{\overline{S}}$ son calculables efectivamente.
- La idea es poner juntas estas dos mitades de un procedimiento de decisión para hacer uno completo.

Teorema de Kleene I

- *Un conjunto (o una relación) es decidible si y sólo si él y su complemento son semidecidibles.*
- Si estamos trabajando con conjuntos de números, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}$; si estamos trabajando con una relación de aridad-k, entonces el complemento es con respecto a $\mathbb{N}^k$.
- *Prueba:* Por un lado, si un conjunto S es decidible, entonces su complemento $\overline{S}$ también es decidible, simplemente intercambiamos el "Sí" y el "No".
- Así tanto S como su complemento $\overline{S}$ son semidecidibles ya que los conjuntos decidibles son también semidecidibles.
- Por otro lado, suponga que S es un conjunto para el que tanto c_S como $c_{\overline{S}}$ son calculables efectivamente.
- La idea es poner juntas estas dos mitades de un procedimiento de decisión para hacer uno completo.
- Digamos que queremos encontrar $C_S(x)$, dado x.

Teorema de Kleene II

- Digamos que queremos encontrar $C_S(x)$, dado x.

Teorema de Kleene II

- Digamos que queremos encontrar $C_S(x)$, dado x.
- Necesitamos organizar nuestro tiempo.

Teorema de Kleene II

- Digamos que queremos encontrar $C_S(x)$, dado x.
- Necesitamos organizar nuestro tiempo.
- Durante los minutos impares, corremos nuestro programa para $c_S(x)$.

Teorema de Kleene II

- Digamos que queremos encontrar $C_S(x)$, dado x.
- Necesitamos organizar nuestro tiempo.
- Durante los minutos impares, corremos nuestro programa para $c_S(x)$.
- Durante los minutos pares, corremos nuestro programa para $c_{\overline{S}}(x)$.

Teorema de Kleene II

- Digamos que queremos encontrar $C_S(x)$, dado x.
- Necesitamos organizar nuestro tiempo.
- Durante los minutos impares, corremos nuestro programa para $c_S(x)$.
- Durante los minutos pares, corremos nuestro programa para $c_{\overline{S}}(x)$.
- Por supuesto, al final de cada minuto, almacenamos por ahí lo que hemos hecho, así podemos posteriormente recogerlo de donde lo hayamos dejado.

Teorema de Kleene II

- Digamos que queremos encontrar $C_S(x)$, dado x.
- Necesitamos organizar nuestro tiempo.
- Durante los minutos impares, corremos nuestro programa para $c_S(x)$.
- Durante los minutos pares, corremos nuestro programa para $c_{\overline{S}}(x)$.
- Por supuesto, al final de cada minuto, almacenamos por ahí lo que hemos hecho, así podemos posteriormente recogerlo de donde lo hayamos dejado.
- Eventualmente, debemos recibir un "Sí".

Teorema de Kleene II

- Digamos que queremos encontrar $C_S(x)$, dado x.
- Necesitamos organizar nuestro tiempo.
- Durante los minutos impares, corremos nuestro programa para $c_S(x)$.
- Durante los minutos pares, corremos nuestro programa para $c_{\overline{S}}(x)$.
- Por supuesto, al final de cada minuto, almacenamos por ahí lo que hemos hecho, así podemos posteriormente recogerlo de donde lo hayamos dejado.
- Eventualmente, debemos recibir un "Sí".
- Si es durante un minuto impar, encontramos que $c_S(x) =$ Sí (esto debe suceder eventualmente si $x \in S$), luego damos la salida "Sí" y paramos.

Teorema de Kleene II

- Digamos que queremos encontrar $C_S(x)$, dado x.
- Necesitamos organizar nuestro tiempo.
- Durante los minutos impares, corremos nuestro programa para $c_S(x)$.
- Durante los minutos pares, corremos nuestro programa para $c_{\overline{S}}(x)$.
- Por supuesto, al final de cada minuto, almacenamos por ahí lo que hemos hecho, así podemos posteriormente recogerlo de donde lo hayamos dejado.
- Eventualmente, debemos recibir un "Sí".
- Si es durante un minuto impar, encontramos que $c_S(x) =$ Sí (esto debe suceder eventualmente si $x \in S$), luego damos la salida "Sí" y paramos.
- Y si es durante un minuto par, encontramos que $c_{\overline{S}}(x) =$ Sí (esto debe suceder eventualmente si $x \notin S$), luego damos la salida "No" y paramos.

Teorema de Kleene III

- Alternativamente, podemos imaginar que trabajamos de manera ambidiestra. Con la mano izquierda, trabajamos calculando $c_S(x)$; con la mano derecha, trabajamos con $c_{\overline{S}}(x)$.

Teorema de Kleene III

- Alternativamente, podemos imaginar que trabajamos de manera ambidiestra. Con la mano izquierda, trabajamos calculando $c_S(x)$; con la mano derecha, trabajamos con $c_{\overline{S}}(x)$.
- Eventualmente, una mano descubre la respuesta. $\dashv$

- Alternativamente, podemos imaginar que trabajamos de manera ambidiestra. Con la mano izquierda, trabajamos calculando $c_S(x)$; con la mano derecha, trabajamos con $c_{\overline{S}}(x)$.
- Eventualmente, una mano descubre la respuesta. $\dashv$
- El conjunto K es un ejemplo de un conjunto semidecidible que no es decidible. Su complemento $\overline{K}$ no es semidecidible; hemos visto que su función semicaracterística f no es calculable efectivamente.

- Alternativamente, podemos imaginar que trabajamos de manera ambidiestra. Con la mano izquierda, trabajamos calculando $c_S(x)$; con la mano derecha, trabajamos con $c_{\overline{S}}(x)$.
- Eventualmente, una mano descubre la respuesta. $\dashv$
- El conjunto K es un ejemplo de un conjunto semidecidible que no es decidible. Su complemento $\overline{K}$ no es semidecidible; hemos visto que su función semicaracterística f no es calculable efectivamente.
- La conexión entre funciones parciales calculables efectivamente y conjuntos semidecidibles puede describirse mejor como sigue:
  Teorema:

- Alternativamente, podemos imaginar que trabajamos de manera ambidiestra. Con la mano izquierda, trabajamos calculando $c_S(x)$; con la mano derecha, trabajamos con $c_{\overline{S}}(x)$.
- Eventualmente, una mano descubre la respuesta. $\dashv$
- El conjunto K es un ejemplo de un conjunto semidecidible que no es decidible. Su complemento $\overline{K}$ no es semidecidible; hemos visto que su función semicaracterística f no es calculable efectivamente.
- La conexión entre funciones parciales calculables efectivamente y conjuntos semidecidibles puede describirse mejor como sigue:

  Teorema:

  (i) *Una relación es semidecidible si y sólo si es el dominio de alguna función parcial calculable efectivamente.*

- Alternativamente, podemos imaginar que trabajamos de manera ambidiestra. Con la mano izquierda, trabajamos calculando $c_S(x)$; con la mano derecha, trabajamos con $c_{\overline{S}}(x)$.
- Eventualmente, una mano descubre la respuesta. $\dashv$
- El conjunto K es un ejemplo de un conjunto semidecidible que no es decidible. Su complemento $\overline{K}$ no es semidecidible; hemos visto que su función semicaracterística f no es calculable efectivamente.
- La conexión entre funciones parciales calculables efectivamente y conjuntos semidecidibles puede describirse mejor como sigue:
  Teorema:
  - **(i)** *Una relación es semidecidible si y sólo si es el dominio de alguna función parcial calculable efectivamente.*
  - **(ii)** *Una función parcial f es una función parcial calculable efectivamente si y sólo si su gráfica G (es decir, el conjunto de tuplas $\langle \vec{x}, y \rangle$ tales que $f(\vec{x}) = y$) es una relación semidecidible.*

Teorema de Kleene IV

- *Prueba:* Para la proposición (i), en una dirección es verdadera por definición: Cualquier relación es el dominio de su función característica, y para una relación semidecidible, esa función es una función parcial calculable efectivamente.

Teorema de Kleene IV

- *Prueba:* Para la proposición (i), en una dirección es verdadera por definición: Cualquier relación es el dominio de su función característica, y para una relación semidecidible, esa función es una función parcial calculable efectivamente.
- Recíprocamente, para una función parcial calculable efectivamente, f, tenemos el procedimiento de semidecisión natural para su dominio: Dado $\vec{x}$, tratamos de calcular $f(\vec{x})$.

Teorema de Kleene IV

- *Prueba:* Para la proposición (i), en una dirección es verdadera por definición: Cualquier relación es el dominio de su función característica, y para una relación semidecidible, esa función es una función parcial calculable efectivamente.
- Recíprocamente, para una función parcial calculable efectivamente, f, tenemos el procedimiento de semidecisión natural para su dominio: Dado $\vec{x}$, tratamos de calcular $f(\vec{x})$.
- Si y cuando tengamos éxito para encontrar $f(\vec{x})$, ignoramos el valor y simplemente decimos Sí y paramos.

Teorema de Kleene IV

- *Prueba:* Para la proposición (i), en una dirección es verdadera por definición: Cualquier relación es el dominio de su función característica, y para una relación semidecidible, esa función es una función parcial calculable efectivamente.
- Recíprocamente, para una función parcial calculable efectivamente, f, tenemos el procedimiento de semidecisión natural para su dominio: Dado $\vec{x}$, tratamos de calcular $f(\vec{x})$.
- Si y cuando tengamos éxito para encontrar $f(\vec{x})$, ignoramos el valor y simplemente decimos Sí y paramos.
- Para probar (ii) en una dirección, suponga que f es una función parcial calculable efectivamente.

Teorema de Kleene IV

- *Prueba:* Para la proposición (i), en una dirección es verdadera por definición: Cualquier relación es el dominio de su función característica, y para una relación semidecidible, esa función es una función parcial calculable efectivamente.
- Recíprocamente, para una función parcial calculable efectivamente, f, tenemos el procedimiento de semidecisión natural para su dominio: Dado $\vec{x}$, tratamos de calcular $f(\vec{x})$.
- Si y cuando tengamos éxito para encontrar $f(\vec{x})$, ignoramos el valor y simplemente decimos Sí y paramos.
- Para probar (ii) en una dirección, suponga que f es una función parcial calculable efectivamente.
- Aquí tenemos un procedimiento de semidecisión para su gráfica G:

Teorema de Kleene IV

- *Prueba:* Para la proposición (i), en una dirección es verdadera por definición: Cualquier relación es el dominio de su función característica, y para una relación semidecidible, esa función es una función parcial calculable efectivamente.
- Recíprocamente, para una función parcial calculable efectivamente, f, tenemos el procedimiento de semidecisión natural para su dominio: Dado $\vec{x}$, tratamos de calcular $f(\vec{x})$.
- Si y cuando tengamos éxito para encontrar $f(\vec{x})$, ignoramos el valor y simplemente decimos Sí y paramos.
- Para probar (ii) en una dirección, suponga que f es una función parcial calculable efectivamente.
- Aquí tenemos un procedimiento de semidecisión para su gráfica G:
- Dado $\langle \vec{x}, y \rangle$, procedemos a calcular $f(\vec{x})$.

Teorema de Kleene IV

- *Prueba:* Para la proposición (i), en una dirección es verdadera por definición: Cualquier relación es el dominio de su función característica, y para una relación semidecidible, esa función es una función parcial calculable efectivamente.
- Recíprocamente, para una función parcial calculable efectivamente, f, tenemos el procedimiento de semidecisión natural para su dominio: Dado $\vec{x}$, tratamos de calcular $f(\vec{x})$.
- Si y cuando tengamos éxito para encontrar $f(\vec{x})$, ignoramos el valor y simplemente decimos Sí y paramos.
- Para probar (ii) en una dirección, suponga que f es una función parcial calculable efectivamente.
- Aquí tenemos un procedimiento de semidecisión para su gráfica G:
- Dado $\langle \vec{x}, y \rangle$, procedemos a calcular $f(\vec{x})$.
- Si y cuando obtenemos el resultado, chacamos para ver si es y o no.

Teorema de Kleene IV

- *Prueba:* Para la proposición (i), en una dirección es verdadera por definición: Cualquier relación es el dominio de su función característica, y para una relación semidecidible, esa función es una función parcial calculable efectivamente.
- Recíprocamente, para una función parcial calculable efectivamente, f, tenemos el procedimiento de semidecisión natural para su dominio: Dado $\vec{x}$, tratamos de calcular $f(\vec{x})$.
- Si y cuando tengamos éxito para encontrar $f(\vec{x})$, ignoramos el valor y simplemente decimos Sí y paramos.
- Para probar (ii) en una dirección, suponga que f es una función parcial calculable efectivamente.
- Aquí tenemos un procedimiento de semidecisión para su gráfica G:
- Dado $\langle \vec{x}, y \rangle$, procedemos a calcular $f(\vec{x})$.
- Si y cuando obtenemos el resultado, chacamos para ver si es y o no.
- Si el resultado en realidad es y, entonces decimos Sí y paramos.

Teorema de Kleene V

- Por supuesto, este procedimiento falla al tratar de dar una respuesta si $f(x)\uparrow$, lo cual es exactamente como debe ser, ya que en este caso, $\langle\vec{x}, y\rangle$ no está en la gráfica.

Teorema de Kleene V

- Por supuesto, este procedimiento falla al tratar de dar una respuesta si $f(x)\uparrow$, lo cual es exactamente como debe ser, ya que en este caso, $\langle \vec{x}, y \rangle$ no está en la gráfica.
- Para probar la otra dirección de (ii) , suponga que tenemos un procedimiento de semidecisión para la gráfica G.

Teorema de Kleene V

- Por supuesto, este procedimiento falla al tratar de dar una respuesta si $f(x)\uparrow$, lo cual es exactamente como debe ser, ya que en este caso, $\langle \vec{x}, y\rangle$ no está en la gráfica.
- Para probar la otra dirección de (ii) , suponga que tenemos un procedimiento de semidecisión para la gráfica G.
- Buscamos calcular, dado $\vec{x}$, el valor $f(\vec{x})$, si éste está definido. Nuestro plan es checar $\langle \vec{x}, 0\rangle, \langle \vec{x}, 1\rangle, \langle \vec{x}, 2\rangle, \ldots$, para ver su membresia a G.

- Por supuesto, este procedimiento falla al tratar de dar una respuesta si $f(x)\uparrow$, lo cual es exactamente como debe ser, ya que en este caso, $\langle \vec{x}, y\rangle$ no está en la gráfica.
- Para probar la otra dirección de (ii) , suponga que tenemos un procedimiento de semidecisión para la gráfica G.
- Buscamos calcular, dado $\vec{x}$, el valor $f(\vec{x})$, si éste está definido. Nuestro plan es checar $\langle \vec{x}, 0\rangle, \langle \vec{x}, 1\rangle, \langle \vec{x}, 2\rangle, \ldots,$ para ver su membresia a G.
- Pero para organizar nuestro tiempo sensatamente, usamos un procedimiento llamado "machihembrar". Aquí está lo que hacemos:

Teorema de Kleene V

- Por supuesto, este procedimiento falla al tratar de dar una respuesta si $f(x) \uparrow$, lo cual es exactamente como debe ser, ya que en este caso, $\langle \vec{x}, y \rangle$ no está en la gráfica.
- Para probar la otra dirección de (ii) , suponga que tenemos un procedimiento de semidecisión para la gráfica G.
- Buscamos calcular, dado $\vec{x}$, el valor $f(\vec{x})$, si éste está definido. Nuestro plan es checar $\langle \vec{x}, 0 \rangle, \langle \vec{x}, 1 \rangle, \langle \vec{x}, 2 \rangle, \ldots,$ para ver su membresia a G.
- Pero para organizar nuestro tiempo sensatamente, usamos un procedimiento llamado "machihembrar". Aquí está lo que hacemos:
    1. Usa un minuto probando si $\langle \vec{x}, 0 \rangle \in G$.

- Por supuesto, este procedimiento falla al tratar de dar una respuesta si $f(x)\uparrow$, lo cual es exactamente como debe ser, ya que en este caso, $\langle \vec{x}, y\rangle$ no está en la gráfica.
- Para probar la otra dirección de (ii) , suponga que tenemos un procedimiento de semidecisión para la gráfica G.
- Buscamos calcular, dado $\vec{x}$, el valor $f(\vec{x})$, si éste está definido. Nuestro plan es checar $\langle \vec{x}, 0\rangle, \langle \vec{x}, 1\rangle, \langle \vec{x}, 2\rangle, \ldots,$ para ver su membresia a G.
- Pero para organizar nuestro tiempo sensatamente, usamos un procedimiento llamado "machihembrar". Aquí está lo que hacemos:
  1. Usa un minuto probando si $\langle \vec{x}, 0\rangle \in G$.
  2. Usa dos minutos probando si $\langle \vec{x}, 0\rangle \in G$ y dos minutos probando si $\langle \vec{x}, 1\rangle \in G$.

Teorema de Kleene V

- Por supuesto, este procedimiento falla al tratar de dar una respuesta si $f(x)\uparrow$, lo cual es exactamente como debe ser, ya que en este caso, $\langle \vec{x}, y\rangle$ no está en la gráfica.
- Para probar la otra dirección de (ii) , suponga que tenemos un procedimiento de semidecisión para la gráfica G.
- Buscamos calcular, dado $\vec{x}$, el valor $f(\vec{x})$, si éste está definido. Nuestro plan es checar $\langle \vec{x}, 0\rangle, \langle \vec{x}, 1\rangle, \langle \vec{x}, 2\rangle, \ldots,$ para ver su membresia a G.
- Pero para organizar nuestro tiempo sensatamente, usamos un procedimiento llamado "machihembrar". Aquí está lo que hacemos:
  1. Usa un minuto probando si $\langle \vec{x}, 0\rangle \in G$.
  2. Usa dos minutos probando si $\langle \vec{x}, 0\rangle \in G$ y dos minutos probando si $\langle \vec{x}, 1\rangle \in G$.
  3. Similarmente, usa tres minutos en cada uno de $\langle \vec{x}, 0\rangle, \langle \vec{x}, 1\rangle$ y $\langle \vec{x}, 2\rangle$.

Teorema de Kleene V

- Por supuesto, este procedimiento falla al tratar de dar una respuesta si $f(x)\uparrow$, lo cual es exactamente como debe ser, ya que en este caso, $\langle \vec{x}, y\rangle$ no está en la gráfica.
- Para probar la otra dirección de (ii) , suponga que tenemos un procedimiento de semidecisión para la gráfica G.
- Buscamos calcular, dado $\vec{x}$, el valor $f(\vec{x})$, si éste está definido. Nuestro plan es checar $\langle \vec{x}, 0\rangle, \langle \vec{x}, 1\rangle, \langle \vec{x}, 2\rangle, \ldots,$ para ver su membresia a G.
- Pero para organizar nuestro tiempo sensatamente, usamos un procedimiento llamado "machihembrar". Aquí está lo que hacemos:
  1. Usa un minuto probando si $\langle \vec{x}, 0\rangle \in G$.
  2. Usa dos minutos probando si $\langle \vec{x}, 0\rangle \in G$ y dos minutos probando si $\langle \vec{x}, 1\rangle \in G$.
  3. Similarmente, usa tres minutos en cada uno de $\langle \vec{x}, 0\rangle, \langle \vec{x}, 1\rangle$ y $\langle \vec{x}, 2\rangle$.
  4. Y así sucesivamente.

Teorema de Kleene VI

- Si y cuando descubramos que, en efecto, $\langle \vec{x}, k \rangle \in G$, entonces regresamos el valor k y paramos.

Teorema de Kleene VI

- Si y cuando descubramos que, en efecto, $\langle \vec{x}, k \rangle \in G$, entonces regresamos el valor k y paramos.
- Observe que siempre que $f(\vec{x}) \downarrow$, tarde o temprano el procedimiento anterior determinará correctamente $f(\vec{x})$ y parará.

Teorema de Kleene VI

- Si y cuando descubramos que, en efecto, $\langle \vec{x}, k \rangle \in G$, entonces regresamos el valor k y paramos.
- Observe que siempre que $f(\vec{x}) \downarrow$, tarde o temprano el procedimiento anterior determinará correctamente $f(\vec{x})$ y parará.
- Por supuesto, si $f(x) \uparrow$, entonces el procedimiento se ejecutará por siempre.

$\dashv$

Tesis de Church I

- No obstante el concepto de calculabilidad efectiva ha sido descrito aquí en términos algo vagos, en la siguiente sección describiremos un concepto preciso (matemáticamente) de una "función parcial computable".

Tesis de Church I

- No obstante el concepto de calculabilidad efectiva ha sido descrito aquí en términos algo vagos, en la siguiente sección describiremos un concepto preciso (matemáticamente) de una "función parcial computable".
- En efecto, se describirán varias maneras equivalentes para formular el concepto en términos precisos.

Tesis de Church I

- No obstante el concepto de calculabilidad efectiva ha sido descrito aquí en términos algo vagos, en la siguiente sección describiremos un concepto preciso (matemáticamente) de una "función parcial computable".
- En efecto, se describirán varias maneras equivalentes para formular el concepto en términos precisos.
- Se argumentará que el concepto matemático de función parcial computable es la formalización *correcta* del concepto informal de una función parcial calculable efectivamente.

Tesis de Church I

- No obstante el concepto de calculabilidad efectiva ha sido descrito aquí en términos algo vagos, en la siguiente sección describiremos un concepto preciso (matemáticamente) de una "función parcial computable".
- En efecto, se describirán varias maneras equivalentes para formular el concepto en términos precisos.
- Se argumentará que el concepto matemático de función parcial computable es la formalización *correcta* del concepto informal de una función parcial calculable efectivamente.
- Esta afirmación es conocida como la *tesis de Church* o la *tesis de Church-Turing*.

Tesis de Church II

- La tesis de Church, relaciona una idea informal con una idea formal, no es en sí una proposición matemática capaz de ser probada.

Tesis de Church II

- La tesis de Church, relaciona una idea informal con una idea formal, no es en sí una proposición matemática capaz de ser probada.
- Pero uno puede buscar evidencia a favor o en contra de la tesis de Church, todo resulta ser evidencia a favor.

Tesis de Church II

- La tesis de Church, relaciona una idea informal con una idea formal, no es en sí una proposición matemática capaz de ser probada.
- Pero uno puede buscar evidencia a favor o en contra de la tesis de Church, todo resulta ser evidencia a favor.
- Una pieza de evidencia es la ausencia de contraejemplos.

Tesis de Church II

- La tesis de Church, relaciona una idea informal con una idea formal, no es en sí una proposición matemática capaz de ser probada.
- Pero uno puede buscar evidencia a favor o en contra de la tesis de Church, todo resulta ser evidencia a favor.
- Una pieza de evidencia es la ausencia de contraejemplos.
- Esto es, cualquier función examinada hasta ahora que los matemáticos han creido que es calculable efectivamente, se ha encontrado que es computable.

Tesis de Church III

- Evidencia más fuerte deriva de varios intentos que diferentes personas hicieron independientemente, tratando de formalizar la idea de calculabilidad efectiva.

Tesis de Church III

- Evidencia más fuerte deriva de varios intentos que diferentes personas hicieron independientemente, tratando de formalizar la idea de calculabilidad efectiva.
- Alonzo Church uso el cálculo$-\lambda$;

Tesis de Church III

- Evidencia más fuerte deriva de varios intentos que diferentes personas hicieron independientemente, tratando de formalizar la idea de calculabilidad efectiva.
- Alonzo Church uso el cálculo$-\lambda$;
- Alan Turing uso un agente de cálculo idealizado (posteriormente llamado maquina de Turing);

Tesis de Church III

- Evidencia más fuerte deriva de varios intentos que diferentes personas hicieron independientemente, tratando de formalizar la idea de calculabilidad efectiva.
- Alonzo Church uso el cálculo$-\lambda$;
- Alan Turing uso un agente de cálculo idealizado (posteriormente llamado maquina de Turing);
- Emil Post desarrollo un enfoque similar.

Tesis de Church III

- Evidencia más fuerte deriva de varios intentos que diferentes personas hicieron independientemente, tratando de formalizar la idea de calculabilidad efectiva.
- Alonzo Church uso el cálculo$-\lambda$;
- Alan Turing uso un agente de cálculo idealizado (posteriormente llamado maquina de Turing);
- Emil Post desarrollo un enfoque similar.
- Extraordinariamente, todos estos intentos resultaron ser equivalentes, en que todos ellos definieron exactamente la misma clase de funciones, llamadas ¡funciones parciales computables!

Tesis de Church IV

- El estudio de la calculabilidad efectiva se inició en 1930s con el trabajo en lógica matemática.

Tesis de Church IV

- El estudio de la calculabilidad efectiva se inició en 1930s con el trabajo en lógica matemática.
- Como se ha notado previamente, el asunto está relacionado con el concepto de una *prueba aceptable*.

Tesis de Church IV

- El estudio de la calculabilidad efectiva se inició en 1930s con el trabajo en lógica matemática.
- Como se ha notado previamente, el asunto está relacionado con el concepto de una *prueba aceptable*.
- Más recientemente, el estudio de la calculabilidad efectiva ha formado una parte escencial de la teoría de la computación.

Tesis de Church IV

- El estudio de la calculabilidad efectiva se inició en 1930s con el trabajo en lógica matemática.
- Como se ha notado previamente, el asunto está relacionado con el concepto de una *prueba aceptable*.
- Más recientemente, el estudio de la calculabilidad efectiva ha formado una parte escencial de la teoría de la computación.
- Un científico de la computación prudente seguramente querrá saber que, además de las dificultades que el mundo real presenta, existe un límite puramente teórico para la calculabilidad.

Ejercicios I

Realice lo que se indica:

1. Asuma que S es un conjunto de número naturales pero que es finito. (Esto es, S es un subconjunto cofinito de $\mathbb{N}$). Explique por qué S debe ser decidible.
2. Asuma que A y B son conjuntos decidibles de números naturales. Explique por qué su intersección $A \cap B$ es también decidible. (Describa un procedimiento efectivo para determinar si un número dado está o no en $A \cap B$.)
3. Asuma que A y B son conjuntos decidibles de números naturales. Explique por qué su unión $A \cup B$ es también decidible.
4. Asuma que A y B son conjuntos semidecidibles de números naturales. Explique por qué su intersección $A \cap B$ es también semidecidible.
5. Asuma que A y B son conjuntos semidecidibles de números naturales. Explique por qué su unión $A \cup B$ es también semidecidible.

Ejercicios II

6.
   1. Asuma que R es una relación binaria decidible sobre los números naturales. Esto es, es una relación decidible de aridad-2. Explique por qué su dominio, $\{x | \langle x, y\rangle \in R \text{ para algún } y\}$, es un conjunto semidecidible.
   2. Ahora suponga que en vez de asumir que R es decidible, asumimos sólo que es semidecidible. ¿Sigue siendo cierto que su dominio debe ser semidecidible?
7.
   1. Asuma que f es una función total calculable de aridad-uno. Explique por qué su gráfica es una relación binaria decidible.
   2. Inversamente, muestre que si la gráfica de una función total de aridad-uno f es decidible, entonces f debe ser calculable.
   3. Ahora asuma que f es una función parcial calculable de aridad-uno, no necesariamente total. Explique por qué su dominio, $\{x \in \mathbb{N} | f(x)\downarrow\}$, es semidecidible.

8. Asuma que S es un conjunto decidible de números naturales y que f es una función *total* calculable efectivamente sobre $\mathbb{N}$. Explique por qué $\{x|f(x) \in S\}$ es decidible. (Este conjunto es llamado la *imagen inversa* de S bajo f.)
9. Asuma que S es un conjunto semidecidible de números naturales y que f es una función parcial calculable efectivamente sobre $\mathbb{N}$. Explique por qué

$$\{x|f(x)\downarrow \text{ y } f(x) \in S\}$$

es semidecidible.

10. En la expansión decimal de π, podría haber una cadena de algunos 7's consecutivos. Defina la función f tal que $f(x) = 1$ si existe una cadena de x o más 7's y $f(x) = 0$ en otro caso:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi \text{ tiene una cadena con } x \text{ o más 7's} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    Explique, sin usar algún hecho especial sobre π o teoría de números, por qué f es calculable efectivamente.

11. Asuma que g es una función total no creciente (esto es, $g(x) \geq g(x+1)$ para todo x) sobre $\mathbb{N}$. Explique por qué g debe ser calculable efectivamente.

12. Asuma que f es una función total sobre los números naturales y que f es eventualmente periódica. Esto es, existen números m y p tales que para todo x mayor que m, tenemos que $f(x+p) = f(x)$. Explique por qué f es calculable efectivamente.

Ejercicios V

13

1. Asuma que f es una función total calculable efectivamente sobre los números naturales. Explique por qué el rango de f (esto es, el conjunto $\{f(x)|x \in \mathbb{N}\}$) es semidecidible.
2. Ahora suponga que f es una función parcial calculable efectivamente (no necesariamente total). ¿Sigue siendo cierto que su rango debe ser semidecidible?
3. Asuma que f y g son funciones parciales calculables efectivamente sobre $\mathbb{N}$. Explique por qué el conjunto

$$\{x|f(x) = g(x) \text{ y ambos están definidos}\}$$

es semidecidible.